CORRIGE-TYPE DE L'EXAMEN DE 'STATISTIQUE DE GESTION'

I– PARTIE THEORIQUE :

1. **Principales définitions :**
   - **Population :** Grand ensemble que l'on se propose d'étudier statistiquement. Il est composé de 'N' individus, trop nombreux pour être recensés.
   - **Echantillon :** Partie de cette population constituée de 'n' individus et élaborée, aléatoirement ou empiriquement, de façon à être représentative de la population mère.
   - **Tirage exhaustif :** tirage aléatoire effectué sans remise dans la population ; ce qui signifie qu'un même élément de cette population ne peut être tiré qu'une seule fois.
   - **Intervalle de confiance :** intervalle de valeurs qui estime un paramètre d'une population à partir d'une statistique d'échantillon aléatoire ; il est associé à un niveau de confiance.
2. **Méthodes d'échantillonnage :**
   - **Méthodes aléatoires ou probabilistes** : l'échantillon est élaboré en tirant au hasard ses individus de la population, c.à.d. avec la même probabilité d'être tiré ; ex. : sondage systématique, sondage par grappes…
   - **Méthodes empiriques ou raisonnées** : l'échantillon est élaboré en choisissant les individus de la population sur lesquels nous avons des informations préalables sur leur représentativité ; ex. sondage par quotas…
3. **Inférence statistique :** Processus qui permet d'élaborer un échantillon aléatoire, puis de généraliser les résultats de cet échantillon à toute la population mère.
4. **Nombre d'échantillons possibles :**
   - **Si échantillonnage exhaustif** = C_N^n
   - **Si échantillonnage non exhaustif** = N^n

II– PARTIE PRATIQUE :

A- EXERCICE SUR L'ESTIMATION D'UNE FRÉQUENCE :

1. **Estimation ponctuelle**: $\pi = E(p)$: p est un estimateur non biaisé de π ; donc : $\pi = 0,48 = 48\%$.
2. **Estimation par intervalle de confiance :** La Distribution d'Echantillonnage de la Fréquence suit la loi Binomiale qui tend vers la loi Normale, car l'échantillon est de grande taille (n=120 et n.p=57,6)
3. On peut déduire que : $\pi = p \pm e = p \pm \sigma_p = p \pm z\sqrt{[p*(1-p)/n]}$
   A.N. : N.C.=90% ↔ z=1,65 ; donc $\pi = 0,48 \pm 1,65*\sqrt{(0,48x0,52/120)} = 0,48 \pm 0,075$
   Je suis sur à 90% que π є [40,5% ; 55,5%]
4. Mr Khattab est élu maire de la ville, s'il obtient plus de 50% de voix :
   Avec un risque d'erreur de 10% : Prob(Khattab élu) = (55,5%-50%)/55,5%-40,5%) = 36,7%.
5. Avec une précision telle que le niveau de confiance est de 98% (et donc z=2.33) et l'intervalle de confiance de e=±3%, on obtient la taille minimale de l'échantillon suivante :
   $n = (z^2/e^2)*p*(1-p) = (2,33x2,33/0.03x0.03)*0,48*0,52 = 1505,6$; soit : n = 1506 électeurs.

B- PROBLÈME SUR L'ESTIMATION D'UNE MOYENNE :

1. **Caractéristiques de l'échantillon :**
   - **Moyenne : $x = \sum(n_i x_i)/n = 85/17 = 5$ cas graves par jour**
   - **Ecart type : $s = \sqrt{\{\sum[n_i(x_i-x)^2]/n\}} = \sqrt{44/17} = 1,61$ cas par jour**
2. **Estimation ponctuelle:**
   - **Moyenne: $\mu=E(x)$: x est un estimateur non biaisé de μ; donc $\mu = 5$ cas graves par jour.**
   - **Ecart type : $\sigma=E(s)$; s est un estimateur non biaisé de σ ; donc $\sigma = s'=s\sqrt{[(n /(n-1)]}$ $\sigma = 5\sqrt{(17/16)} = 1,66$ cas graves par jour.**
3. **Nombre total de cas graves durant l'année = N* μ = 365x5 = 1825 cas graves.**

Estimation par intervalle de confiance :

4. **Echantillon petit de n=17 ; Population normalement distribuée et sa dispersion σ inconnue et estimée à 1,66 : La Distribution d'Echantillonnage de la Moyenne suit la loi de Student à 16 degré de liberté.**
5. **$\mu = x \pm e = x \pm \sigma_x = x \pm t.s'/\sqrt{n}.\sqrt{[(N-n)/N-1)]} = x \pm t.s/\sqrt{(n-1)}.\sqrt{[(N-n)/N-1)]}$**
   A.N. : N.C.=95% et degré de liberté ν=17-1=16 $\leftrightarrow$ t=2,11
   Donc, $\mu = 5 \pm \{2,11.1,61^*/\sqrt{16}^*(\sqrt{(348/364)} = 5 \pm 0,83$
   Je suis sur à 95% que μ є [4,17 ; 5,83] cas graves par jour durant l'année.
6. **A ce degré de précision de 95% :**
   Le nombre maximal de cas graves attendu pour l'année est de : = 5,83x365 = 2128 cas.

On augmente la taille de l'échantillon de 20 autres jours pour atteindre : n=37 jours.

7. **Grand échantillon de n=37 ; Population quelconque, avec une dispersion σ inconnue et estimée à 1,66 : La Distribution d'Echantillonnage de la Moyenne suit la loi de Chebychev qui tend vers la loi normale, car n=37.**
8. **Donc, $\mu = x \pm e = x \pm z.\sigma_x = x \pm z.s'/\sqrt{n}.\sqrt{[(N-n)/N-1)]} = x \pm z.s/\sqrt{(n-1)}.\sqrt{[(N-n)/N-1)]}$**
   A.N. : N.C.=95% $\leftrightarrow$ z=1,96
   Donc, $\mu = 5 \pm \{1,96^*1,61/\sqrt{36}.\sqrt{(328/364)} = 5 \pm 0,50$
   Je suis sur à 95% que μ є [4,5 ; 5,5] cas graves par jour durant l'année.
9. **Au même degré de précision de 95%, cette nouvelle estimation avec un échantillon plus grand, est plus précise, car son intervalle de confiance est plus réduit.**